

# Własności wielokątów

Instrukcja do programu „Własności wielokątów” składa się z następujących części:

1. Możliwości programu.
2. Zakres materiału.
3. Opis działania programu.
4. Przykłady zagadnień.

## Możliwości programu

Projekt umożliwia poznanie własności wielokątów. Uczeń może zbudować własną figurę i za pomocą odpowiednich funkcji sprawdzić jej własności. W szczególności możliwe jest porównywanie długości różnych odcinków oraz kątów, badanie obwodu figury i pola.

Dokładniej użytkownik rysuje wielokąt poprzez zadawanie kolejnych punktów, a następnie może analizować jego własności. W szczególności można dodać na planszy swobodny punkt lub punkt związany z konkretnym odcinkiem. Może on być w dowolnym położeniu, bądź dokładnie w środku. Ponadto dla dowolnego punktu można znaleźć jego rzut na jeden z odcinków. Te narzędzia dla trójkąta pozwalają na konstruowanie wysokości i środkowych oraz badanie ich własności.

W aplikacji możliwe jest porównywanie odcinków na trzech poziomach – mogą to być boki wielokąta, zależności długości boków i przekątnych, jak też i obwód figury. Podobnie kąty możemy badać w trzech grupach, zarówno wizualizować sumę poszczególnych kątów jak też i porównywać ich miary między sobą.

W opcji „pole” możemy badać jak zmienia się ta wielkość w zależności od zmian figury, w szczególności, które wielkości i jak wpływają na zmianę pola.

Ponadto są przygotowane pytania dla uczniów z możliwością ich rozszerzenia i modyfikacji.

## Zakres materiału

Proponowany zakres materiału można podzielić na trzy grupy – zagadnienia związane z trójkątami, czworokątami i własności wielokątów w ogólności.

Dla pierwszej grupy warto zwrócić uwagę na takie zagadnienia jak:

1. nierówność trójkąta
2. suma kątów w trójkącie
3. własności środkowych i wysokości
4. zależność pola od wysokości i podstawy.

Dla czworokątów można wyróżnić następujące własności:

1. własności kątów w różnych typach czworokątów
2. własności przekątnych w różnych rodzajach wielokątów
3. własności pola i obwodu dla różnych typów czworokątów.

Dla trzeciej grupy można badać zależność liczby wierzchołków, boków i przekątnych oraz własności związane z polem i obwodem.

## Opis działania programu

Ekran jest podzielony na następujące części:

- pasek narzędziowy
- plansze ogólne (WIELOKĄT, ODCINKI, KĄTY, POLE)

- plansze – menu.



Nie wszystkie elementy są jednocześnie widoczne -pojawiają się na żądanie. Plansze można modyfikować – przesuwając lub zmieniać ich rozmiar. W razie potrzeby większość z nich można schować klikając na ikonę






**Pasek narzędziowy** składa się z czterech części:

1. opcje rozpoczęcia i zakończenia programu
2. dodanie nowych elementów
3. porównywanie długości odcinków, miar kątów i pola.
4. funkcje o charakterze pomocniczym

### Opcje rozpoczęcia i zakończenia programu

	ponowne rozpoczęcie działania programu
	zakończenie działania programu

### Dodanie nowych elementów




Ikona	Rada	Opis
	wstaw nowe punkty klikając na planszy WIELOKĄT	<p>Dodanie nowego punktu następuje, gdy użytkownik kliknie na planszy WIELOKĄT.</p> <p>Jeśli są przynajmniej trzy punkty i zostanie naciśnięty prawy przycisk myszy łamana zostanie zamknięta i na ekranie utworzy się wielokąt.</p>
	wstaw dodatkowy punkt	<p>Dodanie dodatkowego punktu następuje po wybraniu jednej z opcji:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• swobodny punkt</li> <li>• punkt na odcinku - w dowolnym miejscu lub w środku odcinka, na przecięciu się dwóch odcinków</li> <li>• jako rzut punktu na wskazany odcinek.</li> </ul>
	utwórz nowy odcinek - połącz punkty	Nowy odcinek zostanie utworzony, gdy użytkownik wskaże dwa różne punkty nie połączone odcinkiem.

Dokładniej dodatkowe punkty można stworzyć jako:

- „swobodne punkty” – klikamy w dowolnym miejscu planszy WIELOKĄT
- „na odcinku” – wskazujemy żądany odcinek
- „w środku odcinka” - wskazujemy żądany odcinek
- „na przecięciu” – wskazujemy dwa różne odcinki
- „rzut” – wskazujemy punkt, który chcemy rzutować, a następnie odcinek na który rzutujemy.

Można zmienić kolor odcinka klikając na nim prawym przyciskiem myszy.

### Porównywanie długości odcinków, miar kątów i pola:

Ikona	Rada	Opis
	odłóż odcinki	<p>Użytkownik wskazuje odcinek przez kliknięcie na nim myszą lub przez wskazanie dwóch punktów.</p> <p>Dwie możliwości odkładania odcinków są dodane w celu uniknięcia niejednoznaczności przy odcinkach nakładających się na siebie.</p> <p>Ponadto możemy określić poziom, na którym chcemy odłożyć odcinek.</p>
	odłóż kąt	<p>Podobnie jak dla odcinków możemy odkładać kąty w celu porównania ich miary. Użytkownik wskazuje trzy kolejne punkty. Orientacja kąta będzie zgodna ze wskazówkami zegara.</p> <p>Ponadto określamy nr kąta na którym ma być odłożony nowy kąt.</p>
	pokaż pole	<p>Zielony prostokąt obrazuje pole wielokąta. Za pomocą suwaka można zmieniać długość podstawy prostokąta, wtedy automatycznie zostanie dopasowana wysokość.</p> <p>Wysokość prostokąta jest ograniczona poprzez rozmiar planszy POLE.</p> <p>Program nie wskazuje poprawnego pola dla wielokąta samoprzecinającego się.</p>

### Odkładanie odcinków

W celu porównywania długości różnych odcinków należy zmieniać poziom, na którym odpowiednie odcinki będą odkładane. Zmianę poziomu uzyskujemy klikając na ikonę:



W programie dostępne są trzy poziomy zmieniające się cyklicznie tzn. z pierwszego poziomu przechodzimy na drugi, z drugiego na trzeci, a z trzeciego z powrotem na pierwszy.

Istnieje możliwość skasowania wszystkich odcinków odłożonych na bieżącym poziomie. W tym celu naciskamy przycisk „skasuj aktywny poziom”, który znajduje się na planszy ODKŁADANIE ODCINKÓW.

## Odkładanie kątów

Numer kąta na którym zostanie odłożony nowy kąt użytkownik zmienia poprzez kliknięcie myszą na ikonę:



Istnieje możliwość skasowania aktywnego kąta poprzez wybranie przycisku „skasuj aktywny kąt”.

## Funkcje o charakterze pomocniczym:

Ikona	Rada	Opis
	możesz swobodnie przemieszczać punkty	Ten tryb pozwala na swobodną zmianę wielokąta. Gdy użytkownik wybierze ten tryb wiadomo, że nie zostaną dodane lub odłożone nowe elementy.
	pokaż siatkę	Siatka ma charakter pomocniczy, występuje w trzech trybach: <ul style="list-style-type: none"><li>• brak widocznej siatki</li><li>• siatka widoczna i ruchoma (można ją przesuwać po planszy)</li><li>• siatka widoczna i nieruchoma.</li></ul> Na wszystkich planszach – WIELOKĄT, ODCINKI i POLE – gęstość siatki jest jednakowa.
	sprawdzanie samoprzecinania się wielokątu	Standardowo program sprawdza samoprzecinanie się wielokąta. Co pewien czas jest sprawdzane czy, któryś z boków przecinana inny, jeśli tak to następuje powrót do ostatnio zapamiętanego dobrego położenia.  Tę opcję można wyłączyć klikając na ikonę.
	tłumacz napisy na język angielski	Jeśli użytkownik kliknie na ikonę do tłumaczenia – napisy i komunikaty będą wyświetlane w innym języku – odpowiednio po angielsku lub w języku polskim.
	wykonaj zadania	Pod tą ikoną można znaleźć zadania dla uczniów. Dzielą się one na trzy grupy: <ul style="list-style-type: none"><li>• własności trójkątów</li><li>• pole wielokątów</li><li>• pole i obwód.</li></ul>

## Własności trójkątów

Podawane są różne własności trójkąta, należy zrobić ilustrację do odpowiedzi oraz określić czy dana własność zachodzi. Ilustracja danej własności nie jest dowodem na jej istnienie, ma charakter pomocniczy pozwalający na wyrobienie sobie intuicji.

W obecnej wersji programu są zdefiniowane trzy losowo pojawiające się pytania:

- Czy w trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie? (odp. tak)
- Czy zawsze w trójkącie wysokości są równej długości? (odp. nie)
- Czy w każdym trójkącie suma kątów wynosi 180 stopni? (odp. tak)

Uczeń, który poprawnie odpowie na te pytania oraz wykona do nich ilustrację jest poproszony o odkrycie „nowych” własności trójkąta. W ten sposób może on z jednej strony czerpać inspirację do dalszych poszukiwań, z drugiej ma szansę do wykazania się podejściem konstruktywistycznym.

Ćwiczenie ma na celu wzbogacenie doświadczenia ucznia o nowe własności dla trójkąta.

## Pole wielokątów

Dla danego rodzaju figury należy narysować wielokąt o podanym polu. Pole jest pokazane jako szary prostokąt na planszy POLE. Uczeń może modyfikować dany wielokąt, jednak z zachowaniem jego rodzaju ( tzn. kwadrat musi pozostać kwadratem, romb rombem itp.). Dokładniej punkty ciemnozielone można swobodnie zmieniać, trochę jaśniejsze - z pewnymi ograniczeniami, natomiast wierzchołkami w kolorze bordo nie można manipulować.

Gdy wydaje się, że pole wielokąta jest równe lub bardzo zbliżone zadanemu polu, należy nacisnąć klawisz „sprawdzenie”. Pojawia się zielony prostokąt o polu równym polu wielokąta w planszy WIELOKĄT oraz odpowiedni komunikat o poprawności wykonania zadania, bądź o błędzie.

Pole jest porównywane z dokładnością związaną z wartością zmiennej `dok_pole`. Dokładniej błąd pola wielokąta liczony jako wartość bezwzględna różnicy pola wielokąta i pola zadanego prostokąta musi być mniejszy niż wartość `dok_pole*pole prostokąta`.

W obecnej wersji programu losowane są pytania z następującego zbioru:

- pole trójkąta
- pole czworokąta
- pole pięciokąta
- pole równoległoboku
- pole rombu
- pole trapezu.

Po odpowiedzeniu na wszystkie pytania ponownie zostaje załadowana lista pytań.

Ćwiczenie ma na celu wyrobienie intuicji dotyczącej pola dla różnych wielokątów poprzez porównanie do pola prostokąta, które jest bliskie naturalnej intuicji. W szczególności uczeń może eksperymentować jak zmienia się pole, gdy zmieniamy poszczególne wielkości w wielokącie np. trójkącie.

## Pole i obwód

Zadanie polega na narysowaniu określonego wielokąta o zadanym polu i obwodzie. Użytkownik ma zadane pole poprzez szary rysunek prostokąta na planszy POLE o raz obwód wielokąta poprzez szary odcinek na planszy ODCINKI. W zadaniu chodzi o znalezienie wielokąta o podanym polu i obwodzie. Dokładniej błąd dotyczący pola oraz obwodu musi być mniejszy od zdefiniowanej wielkości wyliczanej jak w poprzednim zadaniu dla zmiennych `dok_pole` i `dok_o`.

W przypadku akceptacji rozwiązania użytkownik przechodzi do następnego polecenia, natomiast w przypadku błędu pojawia się komunikat o błędnym obwodzie lub gdy obwód spełnia kryteria o błędnym polu.

Ćwiczenie ma na celu wyrobienie intuicji dotyczącej pola i obwodu dla różnych wielokątów. Uczeń może zaobserwować, iż istnieją wielokąty o różnym polu i jednakowym obwodzie oraz odwrotnie o jednakowym polu i różnym obwodzie.

## Przykłady zagadnień

Dla trójkąta:

1. nierówność trójkąta
2. suma kątów w trójkącie
3. zależność pola od wysokości podstawy, gdy te wielkości pozostają niezmiennie pole się nie zmienia
4. punkt przecięcia się środkowych

Dla czworokąta:

1. wskazywanie kątów o jednakowych miarach w równoległobokach i trapezach równoramiennych
2. zależność pola od wybranych wielkości

### Dla trójkąta

Krok 1

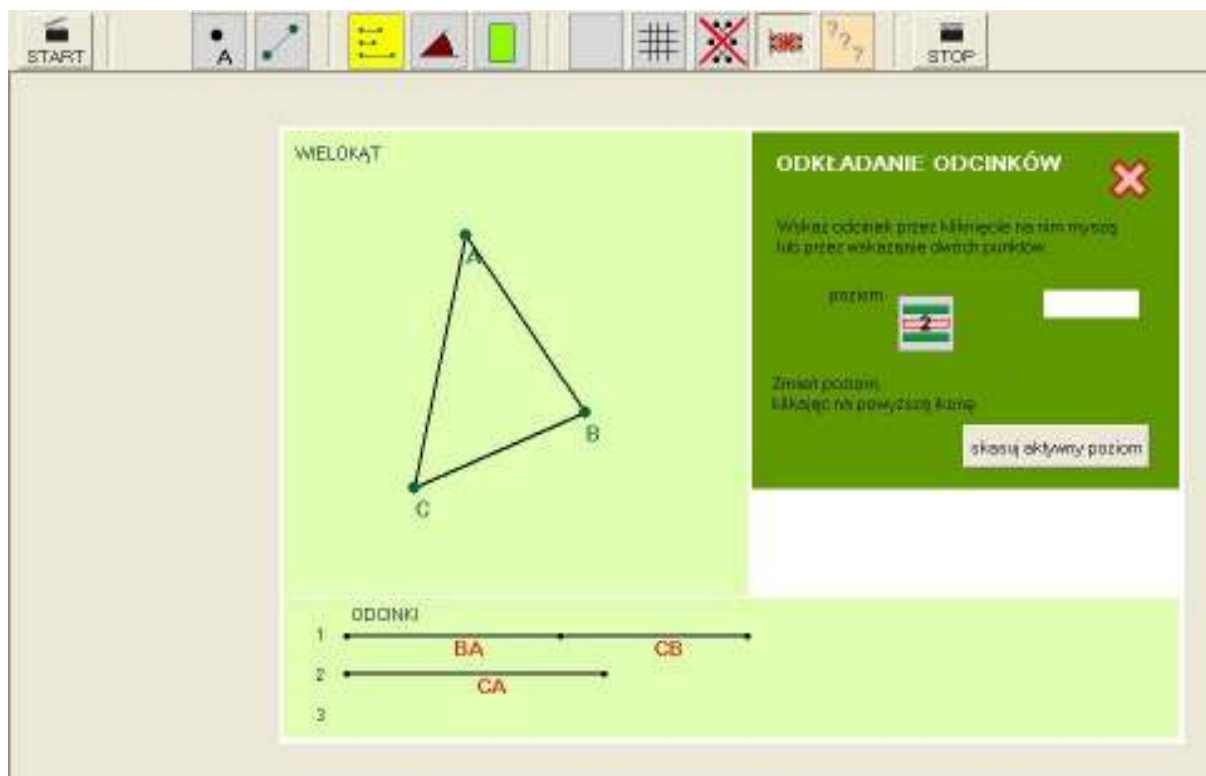
Budujemy trójkąt – trzykrotnie klikamy na planszy WIELOKĄT w celu utworzenia trzech różnych punktów, a następnie klikamy prawym przyciskiem myszy, by zamknąć łamaną.

#### Nierówność trójkąta

Krok 2

Klikamy na ikonę „odłóż odcinki” i na pierwszym poziomie odkładamy dwa dowolne boki trójkąta poprzez kliknięcie na nie myszą. Następnie zmieniamy poziom na drugi klikając na ikonie „zmień poziom” i odkładamy pozostały bok. Dla pewności wybieramy ikonę „możesz swobodnie przemieszczać punkty”, by przypadkowe kliknięcia nie powodowały niepożądanych efektów.

Ilustracja do własności jest już gotowa- polecenie dla ucznia to narysować trójkąt tak, by dwa boki były w sumie mniejsze od trzeciego. Uczeń po próbach powinien zauważyć, iż zadanie nie jest możliwe do wykonania. W ten sposób można zainspirować ucznia do „odkrycia” nierówności trójkąta.



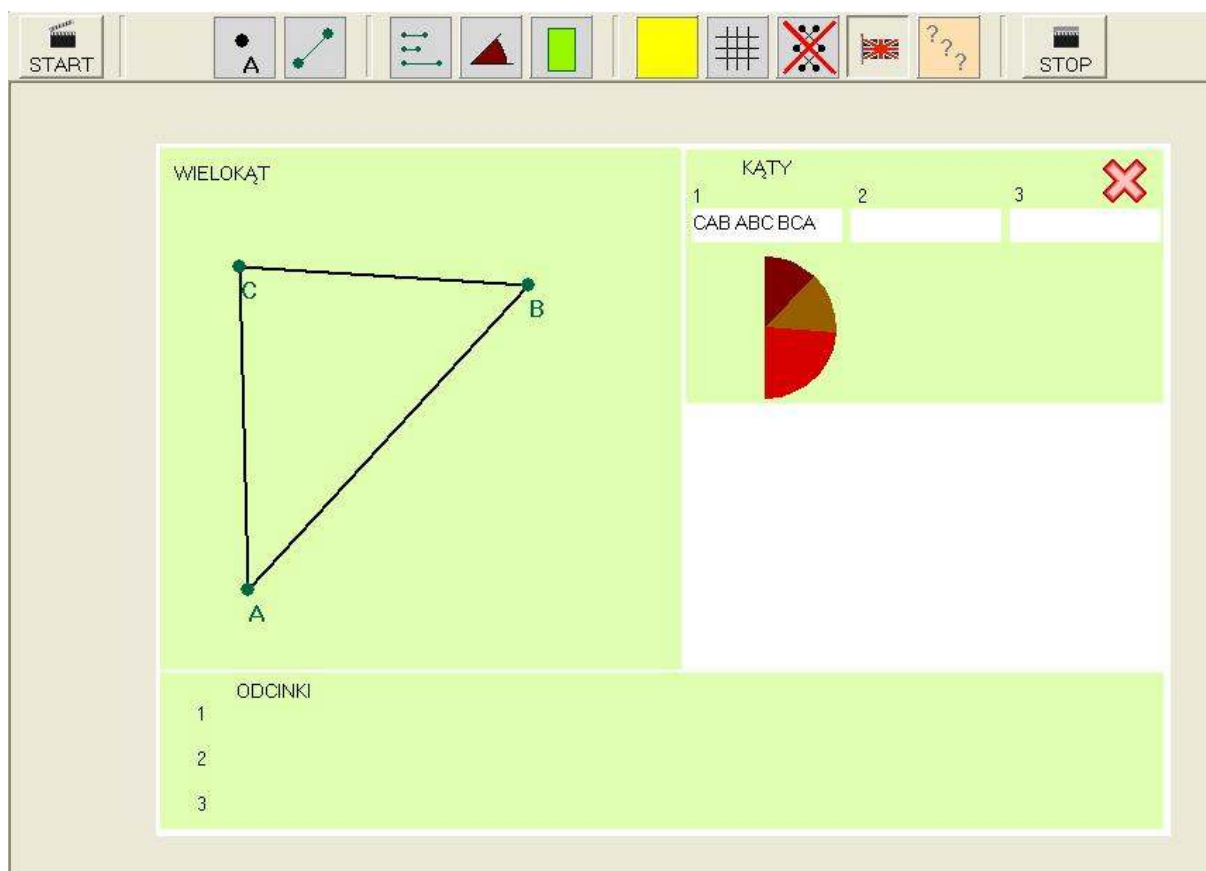
## Suma kątów w trójkącie

### Krok 3

Klikamy na ikonę „odłóż kąt” i odkładamy kolejno na tym samym kącie trzy kąty wewnętrzne trójkąta. W tym celu klikamy trzy razy po trzy wierzchołki trójkąta zwracając uwagę na to, by orientacja katów była właściwa.

Przykładowo mamy trójkąt ABC, gdzie A jest w lewym dolnym rogu, B w prawym górnym, C – zaś w lewym górnym. W celu odłożenia pierwszego kąta wybieramy kolejno punkty: C, A, B, dla kąta drugiego – punkty A, B, C, dla trzeciego zaś punkty B, C, A. Dla pewności wybieramy ikonę „możesz swobodnie przemieszczać punkty”, by przypadkowe kliknięcia nie powodowały niepożądanych efektów.

Ilustracja do własności jest już gotowa- polecenie dla ucznia to modyfikować dowolnie trójkąt jednocześnie obserwując odłożony kąt. Uczeń powinien zauważyć, iż suma kątów w trójkącie jest stała i wynosi  $180^\circ$  (kąt półpełny). Dodatkowo można poprosić ucznia o zbadanie tej własności dla czworokąta.



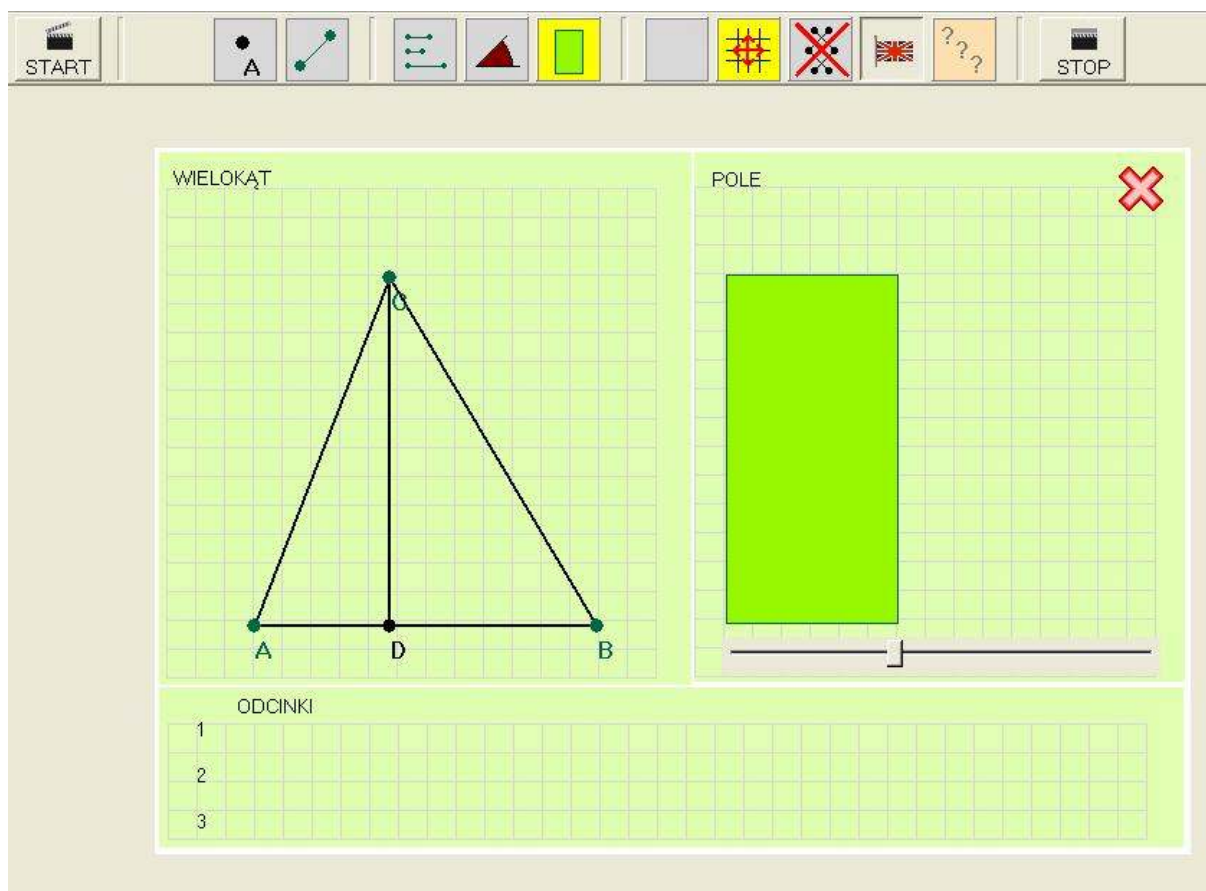
## Własności pola

### Krok 4

Dodajemy wysokość dla trójkąta. W tym celu dodajemy nowy punkt będący rzutem jednego z wierzchołków na bok, który nie przylega do danego wierzchołka. Wykonujemy kolejno kroki: wybieramy ikonę „wstaw dodatkowy punkt”, wybieramy opcję „rzut” i wskazujemy jeden z wierzchołków i odpowiedni odcinek. Przykładowo dla wierzchołka C wybieramy odcinek AB. Kolejne kroki to wybór opcji „utwórz nowy odcinek – połącz punkty”, a następnie wybór odpowiednich punktów – wierzchołka wybranej wcześniej i nowoutworzonego punktu. W naszym przykładzie to będą punkty C oraz D. Ostatnim krokiem będzie wybór opcji „pole”, by użytkownik mógł obserwować zmiany pola.

Dla łatwości obserwacji można tak umieścić trójkąt, by podstawa trójkąta była pozioma a zbudowana wysokość umieszczona pionowo. Ponadto dodanie siatki może ułatwić obserwację – wybieramy ikonę „pokaż siatkę”.

Zadanie dla ucznia polega na obserwacji zmian pola w zależności od zmian w trójkącie. Gdy nie zmieniamy wysokości, mimo iż dwa boki się zmieniają pole pozostaje niezmiennie. Można również zauważyć, iż pole danego trójkąta jest równe polu prostokąta, gdy jeden z boków jest równy wysokości, a drugi połowie podstawy.



### Punkt przecięcia się środkowych

Krok 1 (jak poprzednio)

Budujemy trójkąt – trzykrotnie klikamy na planszy WIELOKĄT w celu utworzenia trzech różnych punktów, a następnie klikamy prawym przyciskiem myszy, by zamknąć łamaną.

Krok 2

Dodajemy punkty na środku boków trójkąta. Wykonujemy kolejno kroki: wybieramy ikonę „wstaw dodatkowy punkt”, wybieramy opcję „w środku odcinka” i wskazujemy kolejno boki trójkąta. Powstają w ten sposób punkty, które znajdują się na środku odcinka.

Krok 3

Rysujemy środkowe. Dokładniej kolejno łączymy punkty znajdujące się na środku boku z przeciwległym wierzchołkiem tzn. wybieramy ikonę „utwórz nowy odcinek” i wskazujemy wierzchołek trójkąta i odpowiedni środek boku. W ten sposób budujemy trzy środkowe trójkąta.



#### Krok 4

Badamy czy środkowe przecinają się w jednym punkcie. Wybieramy ikonę „możesz swobodnie przemieszczać punkty”, by przypadkowe kliknięcia nie powodowały niepożądanych efektów. Następnie zmieniamy położenie wierzchołków trójkąta i obserwujemy czy środkowe przecinają się w jednym punkcie.

Podobne ćwiczenie możemy wykonać dla innych własności związanych z trójkątem.

## Dla czworokąta

### Wskazywanie kątów o jednakowych miarach w równoległobokach i trapezach równoramiennych

#### Krok 1

Budujemy czworokąt – czterokrotnie klikamy na planszy WIELOKĄT w celu utworzenia czterech różnych punktów, a następnie klikamy prawym przyciskiem myszy, by zamknąć łamaną.

#### Krok 2

Dla czworokąta ABCD odkładamy kąty ABC oraz CDA i badamy dla jakich czworokątów kąty te są równe. Dokładniej wybieramy ikonę „odłóż kąt” i wskazujemy kolejno trzy wierzchołki A, B oraz C. Następnie klikamy na ikonę „nr kąta” i przechodzimy do innego kąta. Podobnie wybieramy punkty C, D, A. W ten sposób odłożyliśmy drugi kąt.

#### Krok 3

Badamy dla jakich czworokątów te kąty są równe. Zmieniamy położenie wierzchołków tak, by czworokąt był kolejno kwadratem, prostokątem nie będącym kwadratem, rombem itp. Obserwujemy dla jakich figur kąty są równe.

ODCINKI	
1	
2	
3	

### Zależność pola od wybranych wielkości

Ćwiczenie podobne jak dla trójkąta.

## Moduł 1

### Zastosowania nierówności trójkąta

#### Program:

Do rozwiązywania zadań można wykorzystać zestaw „Nierówność trójkąta”.

#### Zadania:

1. Spróbuj narysować trójkąt gdzie suma dwóch boków jest większa od trzeciego?  
Pytanie pomocnicze: Kiedy suma dwóch boków trójkąta jest równa trzeciemu?
2. Narysuj trójkąt ABC i punkt wewnątrz trójkąta D. Zbadaj jaka jest zależność między sumą odległości punktu D od wierzchołków a obwodem trójkąta.  
Czy zależności te są prawdziwe dla punktu D leżącego poza wnętrzem trójkąta?
3. Czy w czworokącie suma długości przekątnych jest większa od połowy obwodu?  
Czy jest mniejsza od obwodu? Zbadaj dla czworokątów wypukłych i niewypukłych.
4. Kiedy dla czworokąta ABCD suma długości dwóch kolejnych boków jest mniejsza od sumy długości dwóch pozostałych boków tzn.  $BA + CB < DC + DA$  ?
5. Odkryj dalsze zastosowanie nierówności trójkąta.

## Moduł 2

### Własności czworokątów – zestawienie

#### Program:

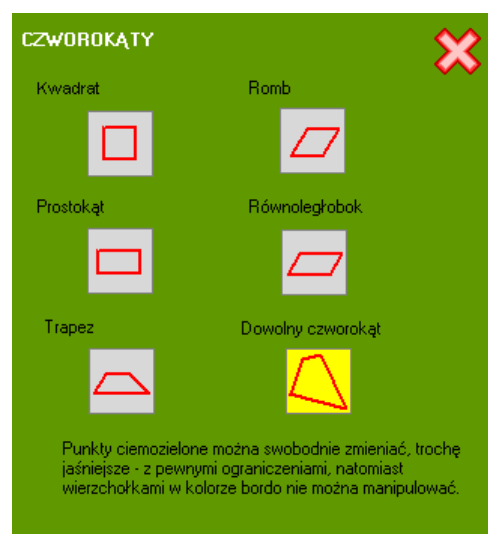
Do rozwiązywania zadań można wykorzystać program „Czworokąty”.

#### Zadania:

1. Uzupelnij tabelkę, w wolne pola należy wpisać tak lub nie.

Pytania umieszczone w tabelce:

- a) Czy wszystkie boki są równe?
- b) Czy wszystkie kąty są równe?
- c) Czy przeciwległe kąty mają jednakowe miary?
- d) Czy przekątne są równej długości?
- e) Czy przecinają się pod kątem prostym?
- f) Czy dzielą się na połowę?



2. Porównaj swoje wyniki z kolegą, w razie wątpliwości sprawdź daną własność za pomocą programu.
3. Dopisz kolejne własność i sprawdź je dla różnych rodzajów czworokątów.

Przykłady pytań, które można dopisać

- a) Czy przynajmniej dwa boki są równoległe?
- b) Czy przeciwległe boki są równe i równoległe?
- c) Czy dwie pary kątów są równe?

- d) Czy wszystkie kąty są proste?
  - e) Czy żaden z kątów nie musi być prosty?
  - f) Czy suma kątów wewnętrznych jest kątem pełnym?
4. Porównaj swoje pomysły z pomysłami kolegów, w razie potrzeby uzupełnij tabelkę o propozycje kolegów.
  5. Wybierz jedną własność i zamieść jej dokładny opis oraz rysunek (zrzut ekranu z programu) poniżej tabelki.

### Moduł 3

## Własności czworokątów – czworokąt w czworokącie

*Jakie własności ma czworokąt, którego wierzchołki są środkami boków dowolnego czworokąta?*

**Program:**

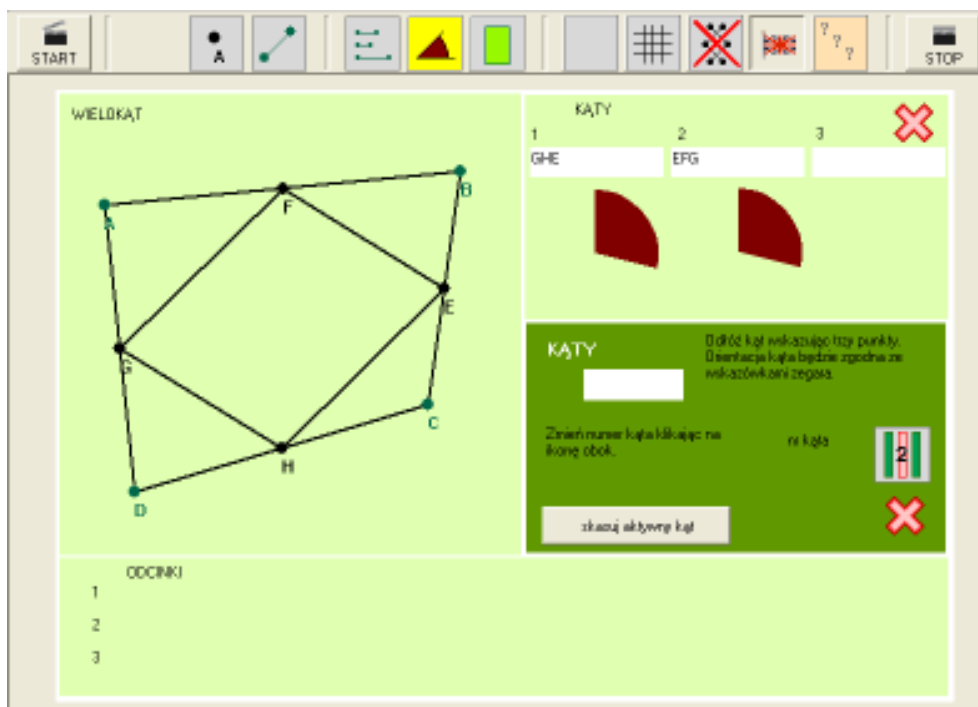
Do rozwiązywania zadań można wykorzystać program „Czworokąty”.

**Zadania:**

1. Zbuduj dowolny czworokąt ABCD. Dodaj następnie punkty, które leżą na środku boków (odpowiednio EFGH). Jakie własności ma czworokąt EFGH?

Pytania pomocnicze:

- a) Czy wszystkie boki są równe?
- b) Czy wszystkie kąty są równe?



2. Zbadaj, przy jakich położeniach punktów  $A, B, C, D$ , czworokąt  $EFGH$  będzie
  - a) prostokątem,
  - b) kwadratem.